



TITLE:

d-Smith集合の計算の具体例について (変換群論とその応用)

AUTHOR(S):

清田, 航平

CITATION:

清田, 航平. d-Smith集合の計算の具体例について (変換群論とその応用). 数理解析研究所講究録 2019, 2135: 12-17

ISSUE DATE:

2019-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/254816>

RIGHT:

d-Smith 集合の計算の具体例について

岡山大学大学院・自然科学研究科 清田 航平 (Kohei Seita)

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

1 準備

本稿では特に断りのない限り、 G は有限群であるとし、実 G -加群は有限次元であるものしか扱わないこととする。また、 $R(G; \mathbb{Q})$ を G の有理表現環、 $\text{RO}(G)$ を G の実表現環とする。

定義 1.1. 有限次元の実 G -加群 V, W に対しホモトピー球面 Σ 上の滑らかな G -作用で、

$$\Sigma^G = \{a, b\}, \quad T_a(\Sigma) \cong V, \quad T_b(\Sigma) \cong W$$

を満たすものが存在するとき、 V と W は **Smith 同値** であるといい、 $V \sim_{\mathfrak{S}} W$ と書く。ここで、上の 2 つの同型は実 G -加群として同型という意味である。 $V \sim_{\mathfrak{S}} W$ であり、すべての G の部分群 H に対して $\dim V^H = \dim W^H$ が成り立つとき、 V, W は **d-Smith 同値** であるといい、 $V \sim_{\mathfrak{dS}} W$ と書く。

定義 1.2. $\text{RO}(G)$ の部分集合 $\mathfrak{S}(G)$, $\mathfrak{dS}(G)$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(G) &= \{[V] - [W] \in \text{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{S}} W\}, \\ \mathfrak{dS}(G) &= \{[V] - [W] \in \text{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{dS}} W\} \end{aligned}$$

により定義する。 $\mathfrak{S}(G)$, $\mathfrak{dS}(G)$ をそれぞれ G の **Smith 集合**, **d-Smith 集合** という。

更に、次の記号を定める。

E : 単位群.

$\mathcal{S}(G)$: G の部分群全体の集合.

$\mathcal{P}(G)$: G の素数冪位数の部分群全体の集合.

$G^{\{p\}}$: G の正規部分群 N で $|G/N|$ が p 冪である最小のもの.

$\mathcal{L}(G)$: ある素数 p に対し $H \supset G^{\{p\}}$ を満たす G の部分群 H 全体の集合.

G^{nil} : G の正規部分群 N で G/N が冪零である最小のもの.

$G^{\cap 2}$: $|G/N| \leq 2$ を満たす G の正規部分群 N 全体の共通部分.

特に、上で定義した $G^{\{p\}}$ を G の p 型の **Dress 部分群** という。

定義 1.3. $\text{RO}(G)$ の部分集合 A と $\mathcal{S}(G)$ の部分集合 \mathcal{F}, \mathcal{G} に対し、次を定める。

$$\begin{aligned} A^{\mathcal{F}} &= \{[V] - [W] \in A \mid V^H = W^H = 0 \text{ (for all } H \in \mathcal{F})\}, \\ A_{\mathcal{G}} &= \{[V] - [W] \in A \mid \text{res}_K^G V \cong \text{res}_K^G W \text{ (for all } K \in \mathcal{G})\}, \\ A_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} &= (A^{\mathcal{F}})_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

命題 1.1 (E. Laitinen–M. Morimoto [3]). 次の等式が成り立つ。

$$G^{\text{nil}} = \bigcap_{p: \text{素数}, p \mid |G|} G^{\{p\}}.$$

定義 1.4. P と G/H が素数冪位数の有限群で H/P が巡回群になるような正規列 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ が存在しないとき, G を **Oliver 群** という.

C_n を位数 n の巡回群, D_{2n} を位数 $2n$ の二面体群とする.

例 1.2. p, q, r を相異なる 3 個の奇素数とする.

1. $C_{pqr} \times C_{pqr}$ と $D_{2pq} \times D_{2pq}$ は Oliver 群である.

2. $C_{pq} \times C_{pq}$ と D_{2pqr} は Oliver 群ではない.

定義 1.5. G の元 g に対し, $(g) = \{xgx^{-1} \mid h \in G\}$ とする. このとき, 集合 $(g) \cup (g^{-1})$ を $(g)^\pm$ と表し, g を代表元とする実共役類という.

以下, 特に断りのない限り, N は G の正規部分群であるとする.

定義 1.6. $\lambda(G, N)$ を g が G の素数冪位数でない G の元全体を動くときの実共役類 $(gN)^\pm$ の個数とする. また, $\nu(G, N)$ を H が G の素数冪位数でない巡回部分群全体を動くときの G/N -共役類 $(HN/N)_{G/N}$ の個数とする.

補題 1.3. G は有限群で, 素数冪位数でない元を持つとする. このとき,

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} R(G; \mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} = \nu(G, E) - \nu(G, N)$$

が成り立つ.

2 $\text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}}$ の階数

定義 2.1. 2 つの $\text{RO}(G)$ の部分加群 $\overline{\text{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$, $\text{RO}_0(G)$ を次のようにして定める.

$$\overline{\text{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) = \{x \in \text{RO}(G) \mid nx \in R(G; \mathbb{Q}) \text{ (for some } n \in \mathbb{N})\},$$

$$\text{RO}_0(G) = \{[V] - [W] \in \text{RO}(G) \mid \dim V^H = \dim W^H \text{ (for all } H \in \mathcal{S}(G))\}.$$

命題 2.1 (M. Morimoto [7], [9]). G が Oliver 群ならば,

$$\text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\mathcal{L}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$$

が成り立つ.

[1] より任意の有限群 G に対して

$$\text{RO}(G) = \overline{\text{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) \oplus \text{RO}_0(G)$$

が成り立つことから, 次の命題が得られる.

命題 2.2. 標準的同型

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{RO}(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} = \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} R_{\mathbb{Q}}(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} \right) \oplus \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} \right)$$

が成り立つ.

補題 2.3 (K. Pawałowski–L. Solomon [10]). $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{RO}(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} = \lambda(G, E) - \lambda(G, N)$ が成り立つ.

補題 1.3, 命題 2.2, 補題 2.3 より, 次の定理が得られる.

定理 2.4. G が素数冪位数でない元を持つとする. このとき,

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{N\}} = (\lambda(G, E) - \lambda(G, N)) - (\nu(G, E) - \nu(G, N))$$

が成り立つ.

系 2.5. G が

$$\lambda(G, E) - \lambda(G, G^{\text{nil}}) > \nu(G, E) - \nu(G, G^{\text{nil}})$$

を満たす *Oliver* 群ならば, $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ は無限集合である.

3 d-Smith 集合の具体的計算

3.1 具体的な d-Smith 集合と主結果

m を 2 以上の整数とし, p_1, p_2, \dots, p_m は $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ を満たす m 個の奇素数とする. また, $q_m = p_1 p_2 \dots p_m$ とおき, x, y をそれぞれ位数 q_m , 2 の D_{2q_m} の生成元とする. このセクションでは, D_{2q_m} の n 個の直積 $D_{2q_m}^n$ の d-Smith 集合について考察していく. 次のことは直ちに得られる.

1. $n \geq 2$ ならば, $D_{2q_m}^n$ は *Oliver* 群である.
2. $i = 1, 2, \dots, m$ に対し, $(D_{2q_m}^n)^{\{p_i\}} = D_{2q_m}^n$ が成り立つ.
3. $(D_{2q_m}^n)^{\{2\}}$ は C_2^n と同型である.

命題 1.1 より,

$$(D_{2q_m}^n)^{\text{nil}} \cong C_2^n$$

が得られる. 以下, n は 2 以上の整数であるとする. 補題 2.1, [5], [7] から, 次の補題が得られる.

補題 3.1. G が $G^{\cap 2} = G^{\text{nil}}$ を満たす *Oliver* 群であれば,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)_{\mathcal{P}(G)} = \text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{G^{\text{nil}}\}}$$

が成り立つ.

補題 3.1 から次の命題が直ちに得られる.

命題 3.2. G は補題 3.1 の仮定を満たす有限群とする. G^{nil} が奇數位数ならば,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \text{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}^{\{G^{\text{nil}}\}}$$

が成り立つ.

命題 3.2 より

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_m}^n) = \text{RO}_0(D_{2q_m}^n)_{\mathcal{P}(D_{2q_m}^n)}^{\{(D_{2q_m}^n)^{\text{nil}}\}} \quad (3.1)$$

が得られるので, $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_m}^n)$ が \mathbb{Z} -自由加群になることがわかる.

定理 3.3. (1) $G = D_{2q_m}^2$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \\ = \left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_m + 3}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2 - 9}{4} - \sum_{k=1}^m \frac{3^{m-k}}{2} \sum_{1 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq m} \prod_{i=1}^k (p_{t_i} - 1) - 3^m - 2^{m+1} - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_2}^2) \geq 46$ が成り立つ. 等号が成立するのは, $(p_1, p_2) = (3, 5)$ のときである.

(3) $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(D_{2q_3}^2) \geq 2714$ が成り立つ. 等号が成立するのは, $(p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 7)$ のときである.

3.2 定理 3.3 の証明

次の命題は容易に得られる.

命題 3.4. $G/N \cong C_2 \times \cdots \times C_2$ を満たすならば,

$$\lambda(G, N) = \nu(G, N)$$

が成り立つ.

以下, $G = D_{2q_m}^2$ とする. 定理 2.4, (3.1), 命題 3.4 より,

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \lambda(G, E) - \nu(G, E) \quad (3.2)$$

が得られるので, 定理 3.3 (1) を証明するためには $\lambda(G, E)$ と $\nu(G, E)$ を求めたら良いことがわかる.

命題 3.5. 次の等式が成り立つ.

$$\lambda(D_{2q_m}^n, E) = \left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_m + 3}{2} \right)^n - \sum_{i=1}^m \left(\frac{p_i + 1}{2} \right)^n + m - 2^n.$$

証明. $D_{2q_m}^n$ の元の共役類の個数が

$$\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_m + 3}{2} \right)^n$$

であり, その中で代表元の位数が $1, 2, p_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) であるものの個数がそれぞれ $1, 2^n - 1, ((p_i + 1)/2)^n - 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) であることから得られる. \square

命題 3.6. 次の等式が成り立つ.

$$\nu(G, E) = \sum_{k=1}^m \frac{3^{m-k}}{2} \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq m} \prod_{i=1}^k (p_{t_i} - 1) - \sum_{i=1}^m \frac{p_i + 3}{2} + 3^m + 2^{m+1} - 3.$$

証明. H を任意の G の素数冪位数でない巡回部分群 $\langle (h_1, h_2) \rangle$ とする. h_1, h_2 は D_{2q_m} の元である. m 以下の自然数 k に対し,

$$X_0 = \{ (H)_G \mid |H| \equiv 1 \pmod{2}, \gcd(\text{ord}(h_1), \text{ord}(h_2)) = 1 \}$$

$$X_k = \{ (H)_G \mid |H| \equiv 1 \pmod{2}, \gcd(\text{ord}(h_1), \text{ord}(h_2)) \text{ の素因数の個数は } k \}$$

$$X_{ev} = \{ (H)_G \mid |H| \equiv 0 \pmod{2} \}$$

とおく. 但し, $i = 1, 2$ に対して $\text{ord}(h_i)$ は D_{2q_m} の元 h_i の位数を表す. このとき, 素数冪位数でない巡回部分群を代表元として持つ G の部分群の共役類の全体は

$$\left(\prod_{i=0}^m X_i \right) \coprod X_{ev}$$

である. 更に,

$$\begin{aligned} |X_0| &= 3^m - 2m - 1, \\ |X_1| &= \sum_{i=1}^m \frac{(3^{m-1} - 1)(p_i - 1)}{2}, \\ |X_k| &= \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq m} \frac{3^{m-k}}{2} \prod_{i=1}^k (p_{t_i} - 1) \quad (2 \leq k \leq m), \\ |X_{ev}| &= 2(2^m - 1) \end{aligned}$$

であることから, この命題が得られる. □

(3.2), 命題 3.5, 3.6 より (1) が得られる. (2), (3) は (1) より得られる.

References

- [1] T. tom Dieck: Transformation Groups and Representation Theory, Lect. Notes Math. **766**, Springer, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.
- [2] A. Koto–M. Morimoto–Y. Qi: The Smith sets of finite groups with normal Sylow 2-subgroups and small nilquotients, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 219–227.
- [3] E. Laitinen–M. Morimoto: Finite groups with smooth one fix point actions on spheres, Forum Math. **10** (1998), 479–520.
- [4] E. Laitinen–M. Morimoto–K. Pawałowski: Deleting-inserting theorem for smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres, Comment. Math. Helv **70** (1995), 10–38.
- [5] M. Morimoto: Smith equivalent $\text{Aut}(A_6)$ -representations are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3683–3688.
- [6] M. Morimoto: Nontrivial $\mathcal{P}(G)$ -matched \mathfrak{S} -related pairs for finite gap Oliver groups, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 623–647.
- [7] M. Morimoto: Tangential representations of one-fixed-point actions on spheres and Smith equivalence, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 195–205.
- [8] M. Morimoto: A necessary condition for the Smith equivalence of G -modules and its sufficiency, Math. Slov. **66** (2015), 1–24.
- [9] M. Morimoto: One-fixed-point actions on spheres and Smith sets, Osaka J. Math. **53** (2016), 1003–1013.
- [10] K. Pawałowski–L. Solomon: Smith equivalence and finite Oliver groups with Laitinen number 0 or 1, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 843–895.

- [11] K. Pawalowski–T. Sumi: Finite groups with Smith equivalent nonisomorphic representations, Proc. 33rd Symposium on Transformation Groups, in Yokohama 2006, (ed. T. Kawakami), Wing Co. Ltd. Wakayama, Japan, (2007), pp. 68–76.
- [12] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer, New York, 1977.
- [13] T. Sumi: The gap hypothesis for finite groups which have an abelian quotient group not of order a power of 2, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 91–106.